Доклады Академии наук СССР
1963. Том 151, № 4

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Р. Е. КРИЧЕВСКИЙ

СЛОЖНОСТЬ КОНТАКТНЫХ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ОДНУ ФУНКЦИЮ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 II 1963)

Задача о нахождении минимальной схемы определенного вида, реализующей данную функцию алгебры логики, имеет практический интерес. Для ее решения необходимо находить удовлетворительную нижнюю оценку сложности произвольной схемы, реализующей данную функцию.

Согласно Шеннону (1), для почти всех функций алгебры логики от n аргументов число контактов в минимальной схеме экспоненциально зависит от n. Тем не менее, пока построено немного примеров функций, для которых сложность минимальной схемы нелинейно зависит от n; можно назвать работы А. А. Маркова (2), Б. А. Субботовской (3), О. Б. Лупанова (4). В работе О. Б. Лупанова (4) доказано, что произвольная контактная схема, не содержащая размыкающих контактов и реализующая функцию $f_0(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$, имеет не менее $C_1 \frac{n \log_2 n}{\log_2 \log_2 n}$ контактов, где C_1 — некоторая положительная константа.

Целью настоящей заметки является доказательство следующих двух утверждений:

1. Произвольная контактная схема, не содержащая размыкающих контактов и реализующая функцию $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, имеет не менее $C_2 n \log_2 n$ контактов, где C_2 — некоторая положительная константа (теорема 2).

2. Существует минимальная параллельно-последовательная контактная схема, реализующая $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащая размыкающих контактов (следствие леммы 1).

Следовательно, произвольная контактная параллельно-последовательная схема, реализующая $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, имеет не менее $C_2 n \log_2 n$ контактов.

Отметим, что эти нижние оценки лишь не зависящим от n множителем отличаются от приведенной в работе В. К. Коробкова (5) верхней оценки сложности минимальной параллельно-последовательной схемы, реализующей $f_0(x_1, \ldots, x_n)$.

Формулу в базисе $\vee$, $\cdot$, — мы далее будем называть просто формулой. Число входящих в формулу $G(x_1, \ldots, x_n)$ знаков переменных назовем ее сложностью и обозначим $L(G(x_1, \ldots, x_n))$. Условимся, что пустая формула имеет нулевую сложность и реализует функцию, тождественную нулю. Если $g(x_1, \ldots, x_n)$ — функция алгебры логики, то через $L(g(x_1, \ldots, x_n))$ обозначим сложность простейшей из реализующих ее формул. Известно, что между формулами и параллельно-последовательными схемами существует изоморфизм.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если $x_1 + \ldots + x_n = 1$ *. Через $H(g(x_1, \ldots, x_n))$ будем обозначать множество всех функций алгебры логики $g^\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что

А. $g^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

Б. $g^\alpha(x_1, \ldots, x_n) \geqslant g(x_1, \ldots, x_n)$, если $x_1 + \ldots + x_n \neq 0$.

* Знак $+$ обозначает арифметическое сложение.

Пусть $L(H(g(x_1, \ldots, x_n))) = \min L(g^\alpha(x_1, \ldots, x_n))$, $g^\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in H(g(x_1, \ldots, x_n))$. Будем через $H^*(g(x_1, \ldots, x_n))$ обозначать множество всех тех функций $g^\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in H(g(x_1, \ldots, x_n))$, для которых выполнено условие

В. $L(g^\alpha(x_1, \ldots, x_n)) = L(H(g(x_1, \ldots, x_n)))$.

$H^*(g(x_1, \ldots, x_n))$ непусто для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Л е м м а 1. *Пусть* $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, *если* $x_1 + \ldots + x_n = 1$. *Тогда существует функция* $g^*(x_1, \ldots, x_n) \in H^*(g(x_1, \ldots, x_n))$, *одна из минимальных формул которой имеет вид*

$$\bigvee_{i=1}^{T} \Big(\bigvee_{l \in A_i} x_l\Big) \cdot \Big(\bigvee_{l' \in A_i'} x_{l'}\Big). \tag{1}$$

Здесь A_i *и* A_i' *— некоторые подмножества множества* $(1, 2, \ldots, n)$, $A_i \cap A_i' = \phi$, *причем, если одно из множеств* A_i *и* A_i' *пусто, то пусто и другое;* $i = 1, 2, \ldots, T$, $T \geqslant 1$ *.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем индукцией по числу переменных у функции $g(x_1, \ldots, x_n)$. Для $n = 1$ лемма очевидна. Пусть лемма доказана для функций, имеющих $n - 1$ аргументов. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $x_1 + \ldots + x_n = 1$, $g^1(x_1, \ldots, x_n) \in H^*(g(x_1, \ldots, x_n))$, а $G^1(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая минимальная формула функции $g^1(x_1, \ldots, x_n)$. Мы можем считать, что любая отличная от переменного подформула входит в $G^1(x_1, \ldots, x_n)$ без отрицания.

$$G^1(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{T} G_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot G_i'(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где $T \geqslant 1$, $G_i(x_1, \ldots, x_n)$ и $G_i'(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, T$,— некоторые формулы, реализующие не тождественные единице функции $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_i'(x_1, \ldots, x_n)$.

Назовем переменное x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выделенным для $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, если $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от x_i и $g_1(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 1$ (единица стоит на i-м месте). Из А следует, что множества переменных, выделенных для $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_1'(x_1, \ldots, x_n)$, не пересекаются. Пусть, без ограничения общности, $x_1, \ldots, x_k$ и $x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}$ все переменные, являющиеся выделенными соответственно для $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_1'(x_1, \ldots, x_n)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant k + l \leqslant n$. Можно проверить, что функция $g^2(x_1, \ldots, x_n)$, реализуемая формулой $G^2(x_1, \ldots, x_n)$:

$$G^2(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee G_1(0, \ldots, 0\, x_{k+1}, \ldots, x_n)) \cdot$$
$$\cdot (x_{k+1} \vee \ldots x_{k+l} \vee G_1'(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0, x_{k+l+1}, \ldots, x_n)) \vee$$
$$\vee \bigvee_{i=2}^{T} G_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot G_i'(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

вновь принадлежит $H^*(g(x_1, \ldots, x_n))$ и $L(g^2(x_1, \ldots, x_n)) = L(g^2(x_1, \ldots, x_n))$.

Пусть $g_1(0, \ldots, 0, x_{k+l}, \ldots, x_n) = \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\beta})$, где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_\beta}$ — все существенные переменные функции $g_1(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Можно убедиться, что $\beta < n$. Так как $x_1, \ldots, x_k$ — все выделенные переменные функции $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, то $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\beta}) = 0$ при $x_{i_1} + \ldots + x_{i_\beta} = 1$. Поэтому, по предположению индукции, существует функция $\varphi^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\beta}) \in H^*(\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\beta}))$, имеющая минимальную формулу $\Phi^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\beta})$ вида (1). Аналогичная функция $\varphi'^*(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\gamma})$ существует для $\varphi'(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\gamma}) = g'(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, $0 \leqslant \gamma < n$.

* Пустая формула имеет вид (1). Функция $g^*(x_1, \ldots, x_n)$, реализуемая формулой вида (1), монотонна и $g^*(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1$.

Рассмотрим функцию $g^3(x_1, \ldots, x_n)$, реализуемую формулой $G^3(x_1, \ldots, x_n)$:

$$G^3(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_k) \cdot (x_{k+1} \vee \ldots \vee x_{k+l}) \vee \Phi^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\beta}) \vee$$

$$\vee \Phi'^*(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\gamma}) \vee \bigvee_{i=2}^{T} G_i(x_1, \ldots, x_n)\, G_i'(x_1, \ldots, x_n)\ ^*. \qquad (4)$$

Можно доказать, что $g^3(x_1, \ldots, x_n) \in H^*(g(x_1, \ldots, x_n))$, а $L(G^3(x_1, \ldots, x_n)) = L(g^3(x_1, \ldots, x_n))$. Преобразуя члены $G_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot G_i'(x_1, \ldots, x_n)$ при $i > 1$ так же, как и первый, мы получим функцию $g^*(x_1, \ldots, x_n) \in H^*(g(x_1, \ldots, x_n))$, причем минимальная формула для $g^*(x_1, \ldots, x_n)$ будет иметь вид (1). Лемма доказана.

Следствие. *У функции $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ существует минимальная формула вида* (1).

Число вхождений переменной x_i в формулу $F(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим через $m_i(F(x_1, \ldots, x_n))$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Лемма 2. *У функции $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ существует такая минимальная формула $F_0(x_1, \ldots, x_n)$ вида* (1), *что*

$$|m_i(F_0(x_1, \ldots, x_n)) - m_j(F_0(x_1, \ldots, x_n))| \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Теорема 1. *Функция $L(f_0(x_1, \ldots, x_n))$ удовлетворяет неравенству*:

$$L(f_0(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant C_2 n \log_2 n,$$

где $C_2 = 1/4$.

Доказательство. Теорему доказываем индукцией. Пусть в формулу $F_0(x_1, \ldots, x_n)$, существование которой утверждается в лемме 2, $n - p$ переменных входят максимальное число m раз, а остальные p переменных $m - 1$ раз, $0 \leqslant p \leqslant n$. Возьмем произвольный дизъюнктивный член формулы $F_0(x_1, \ldots, x_n)$, например, первый:

$$(\bigvee_{l \in A_1} x_l) \cdot (\bigvee_{l' \in A_1'} x_{l'}).$$

Пусть множества A_1 и A_1' состоят соответственно из a и a' элементов. Будем считать, что $a \leqslant a'$. Пусть среди переменных x_l, $l \in A_1$, насчитывается b_1 переменных, входящих в $F_0(x_1, \ldots, x_n)$ m раз и $b_2 = a - b_1$ переменных, входящих $m - 1$ раз. Положим $x_l = 0$, если $l \in A_1$. Получим:

$$L(n) \geqslant a' + b_1 m + b_2(m - 1) + L(n - a), \qquad (5)$$

где $L(n) = L(f_0(x_1, \ldots, x_n))$.

Учитывая, что $m = \dfrac{L(n) + p}{n}$ и приняв во внимание предположение индукции, после несложных преобразований получим

$$L(n) \geqslant \frac{n(a' - b_2) + ap}{n - a} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4} n \log_2 n. \qquad (6)$$

При $p \geqslant n/2$ утверждение теоремы непосредственно следует из (6). При $p \leqslant n/2$ воспользуемся тем, что найдется некоторый член (пусть это будет первый), в котором $b_2/(a + a') \leqslant p/n$. Из этого неравенства и из (6) следует теорема 1. Теорема доказана.

Пусть теперь S — произвольная контактная схема из замыкающих контактов, реализующая $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, π_1 и π_2 — ее полюса. Если некоторая вершина α соединена с π_1 пучком параллельных контактов, то среди контактов этого пучка и остальных, инцидентных α, нет одинаковых (см. [4]). Если α не соединена контактом с π_1, то отождествим ее с π_2. Так как каждая цепь, исходящая из π_1, проходит через два разных контакта, то новая схема будет вновь реализовать $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ и будет не сложнее исходной. Итак, мы можем считать, что найдется такая минимальная схема из замыкающих контактов, реализующая $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, в которой каждая вершина смежна обоим полюсам.

---

* Если $k = 0$ или $l = 0$, то член $(x_1 \vee \ldots \vee x_k) \cdot (x_{k+1} \vee \ldots \vee x_{k+l})$ отсутствует.

Теорема 2. *Контактная схема, содержащая лишь замыкающие контакты и реализующая* $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, *насчитывает не менее* $C_3 n \log_2 n$ *контактов, где* $C_3 = \text{const}$.

Доказательство. Заменим в схеме S каждый мостиковый (здесь — неинцидентный никакому полюсу) контакт a на два, как показано на рис. 1. Получим параллельно-последовательную схему S_1 с функцией проводимости $f_1(x_1, \ldots, x_n)$. Конъюнкция, отвечающая цепи в S, проходящей через произвольный мостиковый контакт, имеет вид $b \cdot c \cdot \ldots$, где b инцидентен π_1, а c — некоторый мостиковый контакт, инцидентный b. Этой конъюнкции соответствует в S_1 цепь с проводимостью $b \cdot c$. Остальные цепи в S и S_1 одинаковы. Поэтому $f_0(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f_1(x_1, \ldots, x_n)$. С другой стороны, в S_1 каждая цепь проходит через два разных контакта, поэтому $f_1(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f_0(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, параллельно-последовательная схема S_1 реализует $f_0(x_1, \ldots, x_n)$. Так как S_1 не более чем в два раза сложнее S, то теорема 2 следует из теоремы 1, если положить $C_3 = {}^1/_2 C_2$.

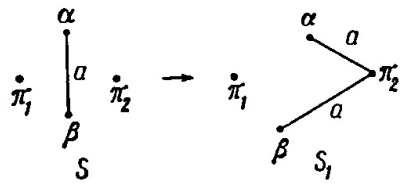

Рис. 1

Институт математики с вычислительным центром
Сибирского отделения АН СССР

Поступило
14 II 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. E. Channon, Bell Syst. Techn. J., **28**, № 1, 59 (1949). [2] А. А. Марков, Тезисы докл. на Всесоюзн. совещ. по теории устройств релейного действия, М., 1957. [3] Б. А. Субботовская, ДАН, **136**, № 3, 553 (1961). [4] О. Б. Лупанов, ДАН, **144**, № 6, 1245 (1962). [5] В. К. Коробков, ДАН, **109**, № 2, 260 (1956).